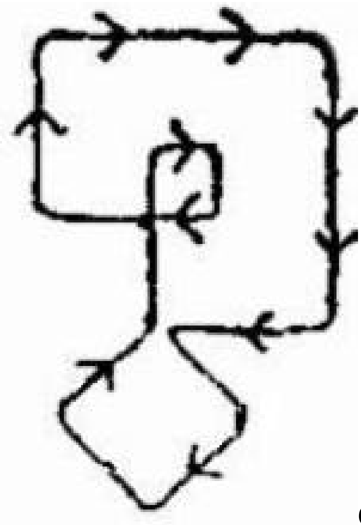
Capítulo 24
DE UN TRAZO

Dibujo de figuras sin levantar el lápiz



Cuadro 39

El problema de los puentes de Künigsberg[1]
La atención del genial matemático Euler la atrajo en una ocasión un Künigsberg problema sui generis que él enunció de esta forma: «En Künigsberg l) hay una isla que se llama Kneiphof. El río que la baña se divide en dos brazos (fig. 284), sobre los cuales hay tendidos siete puentes.

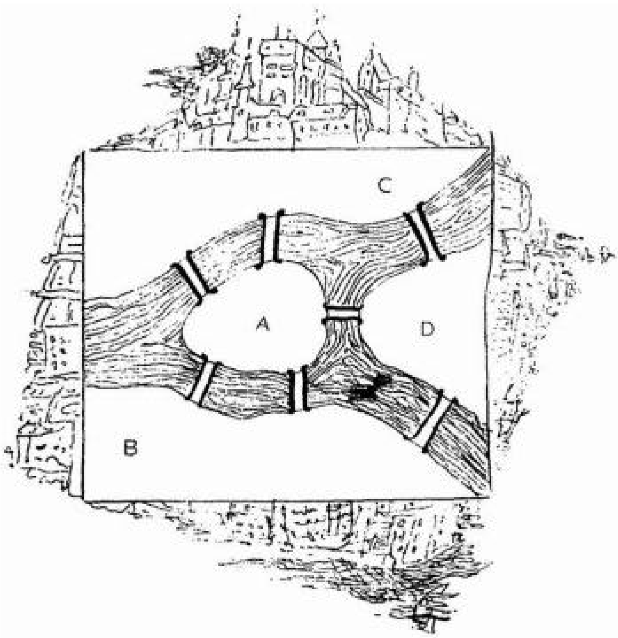


Figura 284

[1] Ahora Kaliningrado

¿Pueden cruzarse todos es os puentes sin pasar por ninguno más de una vez?

Hay quien afirma que es posible. Otros, por el contrario, consideran que es imposible cumplir esta condición».

¿Qué opina usted?

¿Qué es la topología?

Al problema de los puentes de Künigsberg le dedicó Euler toda una investigación matemática, que fue presentada en 1736 a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Este trabajo comienza con las siguientes palabras, que determinan a qué rama de las matemáticas corresponde el estudio de estos problemas:

«Además de la rama de la geometría que estudia las magnitudes y los procedimientos de medición, que fue ya cuidadosamente elaborada en la antigüedad, Leibniz hizo mención por vez primera de otra rama que é1 llamó «geometría de posición». Esta rama de la geometría se ocupa solamente del orden en que están dispuestas las partes de las figuras, unas con respecto a otras, prescindiendo de sus dimensiones[2].

Hace poco tuve ocasión de oír una conversación acerca de un problema de geometría de posición, y decidí exponer aquí, a modo de ejemplo, el procedimiento que hallé para resolverlo». Euler se refería al problema de los puentes de Künigsberg.

Aquí no vamos a reproducir los razonamientos del gran matemático. Nos limitaremos a dar unas ideas concretas que confirman su conclusión. Consiste ésta en que el recorrido que plantea el problema es imposible.

Análisis del problema

Para mayor claridad sustituimos e1 dibujo de la disposición de los brazos del río por el esquema simplificado de la fig. 285. En el problema planteado no tienen ninguna importancia las dimensiones de la isla ni las longitudes de los puentes (éste es el rasgo característico de todos los problemas topológicos: el no depender de las dimensiones relativas de las partes de la figura).

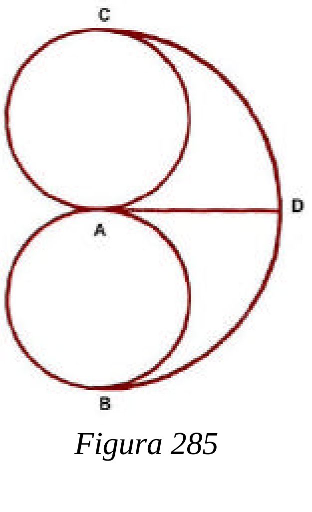


Figura 285

[2] En la actualidad esta rama de la geometría superior se llama «topología» y se ha convertido en una amplísima ciencia matemática. Los problemas que ofrecemos en este capítulo se refieren a un dominio que sólo constituye una pequeña parte de la topología.

Por esto los lugares A, B, C y D (fig. 284) podemos. sustituirlos en el esquema por los puntos de igual denominación en que se encuentran los caminos a seguir durante el recorrido. E1 problema se reduce ahora, como puede verse, a dibujar la fig. 285 de un trazo, es decir, sin levantar la pluma del papel y sin recorrer una misma línea dos veces.
Demostraremos que es imposible dibujar nuestra figura de un solo trazo. En efecto, a cada uno de los puntos nodales A, B, C y D hay que llegar por uno de los caminos y luego salir de él por otro camino; esta regla sólo tiene dos excepciones, a saber: el primer punto, al cual no hay que llegar de ninguna parte, y el último, del cual no hay que salir. Por lo tanto, para poder recorrer nuestra figura sin levantar la pluma es necesario que en cada uno de los puntos nodales, menos dos, converjan dos a cuatro caminos, es decir, un número par de ellos. Pero en cada uno de los puntos A, B, C y D de nuestra figura converge precisamente un número impar de líneas. Por esto es imposible dibujarla de un solo trazo de pluma y, por consiguiente, es imposible pasar los puentes de Königsberg como indica la condición del problema.

Siete problemas
Intente dibujar de un solo trazo cada una de las siete figuras de la fig. 286.

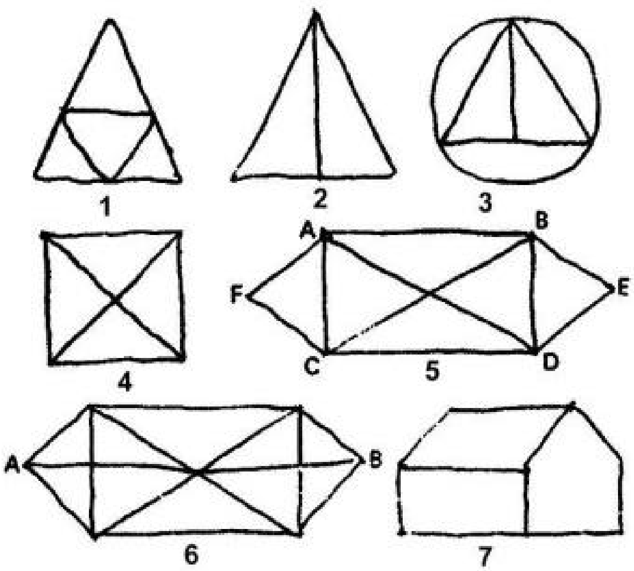


Figura 286

Recuerde las condiciones: dibujar todas las líneas de la figura dada sin levantar la pluma del papel, sin hacer rayas de más y sin pasar dos veces por una misma línea.

Un poco de teoría
Los intentos de dibujar con una línea ininterrumpida las figs. 286, 1-6, conducen a diversos resultados. Algunas figuras pueden dibujarse cualquiera que sea el punto desde el cual se comience a trazar la línea ininterrumpida. Otras sólo se pueden dibujar de un solo trazo cuando se empiezan desde puntos determinados. Finalmente, hay un tercer grupo de figuras que no puede dibujarse con una línea ininterrumpida. ¿A qué se debe esta diferencia? ¿Existen indicios que permitan determinar a priori si una figura dada puede dibujarse de un solo trazo y, si esto es así, el punto desde el cual debe comenzarse a trazar?

La teoría da respuestas exhaustivas a estas preguntas. Veamos algunos de los postulados de esta teoría.

Llamaremos «pares» a los puntos de la figura en que converge un número par de líneas, para diferenciarlos de los puntos «impares», a los cuales concurre un número impar de ellas.

Puede demostrarse (aunque no nos detengamos a hacerlo) que cualquiera que sea la figura, o no tendrá puntos impares o, si los tiene, serán dos, cuatro, seis o, en general, un número par de ellos. Si la figura carece de puntos impares, podrá dibujarse siempre de un solo trazo, empezando por cualquiera de sus puntos. De este tino son las figs. 286 1 y 5.

Si la figura tiene solamente dos puntos impares, se podrá dibujar de un solo trazo si se empieza por uno cualquiera de estos puntos impares. Se comprenda fácilmente que el dibujo terminará en el segundo punto impar. A este tipo pertenecen las figuras 2, 3 y 6; la figura 6, por ejemplo, debe empezarse a dibujar por el punto A o por el punto B.

Si la figura tiene más de un par de puntos impares, no puede dibujarse de un solo trazo. Las figuras 4 y 7, que tienen dos pares de puntos impares, san de este último tipo.

Lo expuesto es suficiente para conocer las figuras que no pueden dibujarse de un solo trazo y las que pueden dibujarse, así como el punto desde el cual hay que comenzar a dibujarlas. El profesor W. Arras propone guiarse después por la regla: «Todas las líneas ya dibujadas de la figura dada deben considerarse inexistentes y, al elegir la siguiente línea a trazar, debe procurarse que la figura conserve su integridad (es decir, que no se descomponga), si esta línea también se quita del dibujo.»

Supongamos, por ejemplo, que la figura 5 comenzó a dibujarse siguiendo el camino ABCD. Si ahora se traza la línea DA, quedan sin dibujar dos figuras, la ACF y la BDE, que no están ligadas entre sí (la figura 5 se descompone). En este caso, después de terminar la figura AFC no podemos pasar a la figura BDE, ya que no habrá líneas aún no dibujadas que las liguen entre sí. Por esto, una vez recorrido el camino ABCD, no se puede seguir adelante por la línea DA, sino que antes debe trazarse el camino DBED y luego, por la línea DA que queda, pasar a la figura AFC.

Otros siete problemas

Dibuje sin levantar la pluma del papel las figuras siguientes:

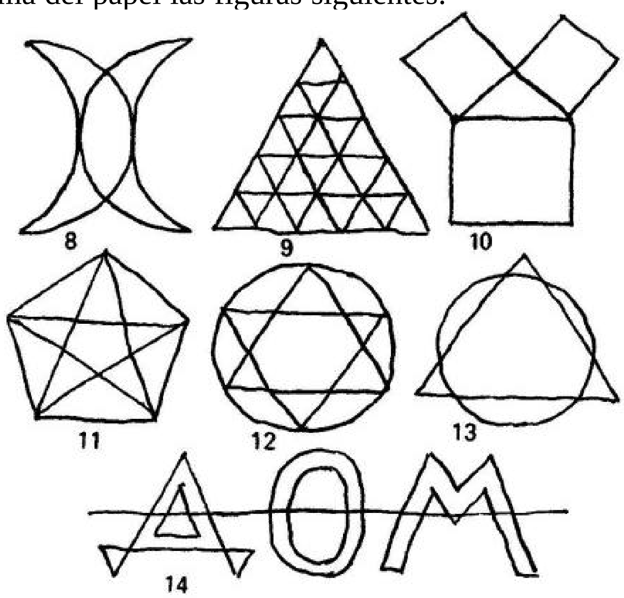


Figura 287

Los puentes de Leningrado

Para terminar proponemos un problema que sirve de tema a una de las muestras de la sala de matemáticas de la Casa de la Ciencia Recreativa. El problema consiste en pasar por los 17 puentes que unen entre sí las partes del territorio, que representa la figura, sin recorrer ninguno de ellos dos veces. A diferencia del problema de los puentes de Künigsberg, el recorrido que se plantea esta vez es realizable y nuestro lector tiene ya los conocimientos teóricos necesarios para poder resolver este problema sin necesidad de ayuda.

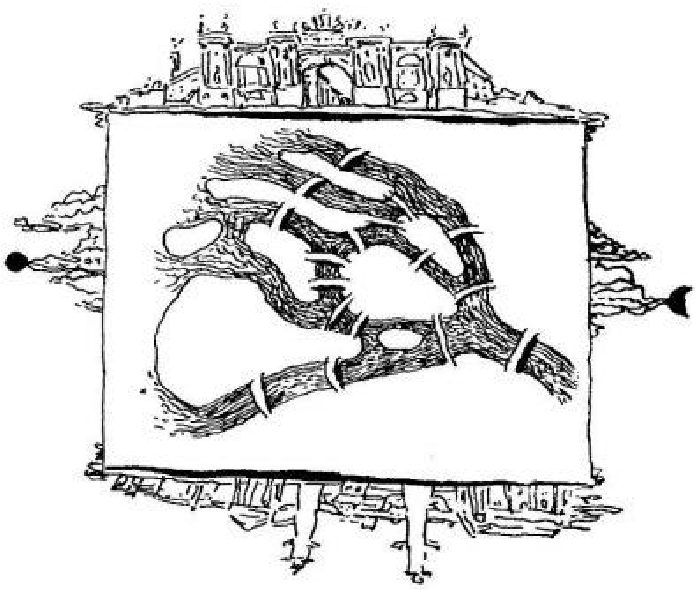


Figura 288

Capítulo 24
SOLUCIONES

Siete problemas y otros siete problemas

En las figs. 289 y 290 se dan las soluciones correspondientes a los problemas del capítulo «De un solo trazo».

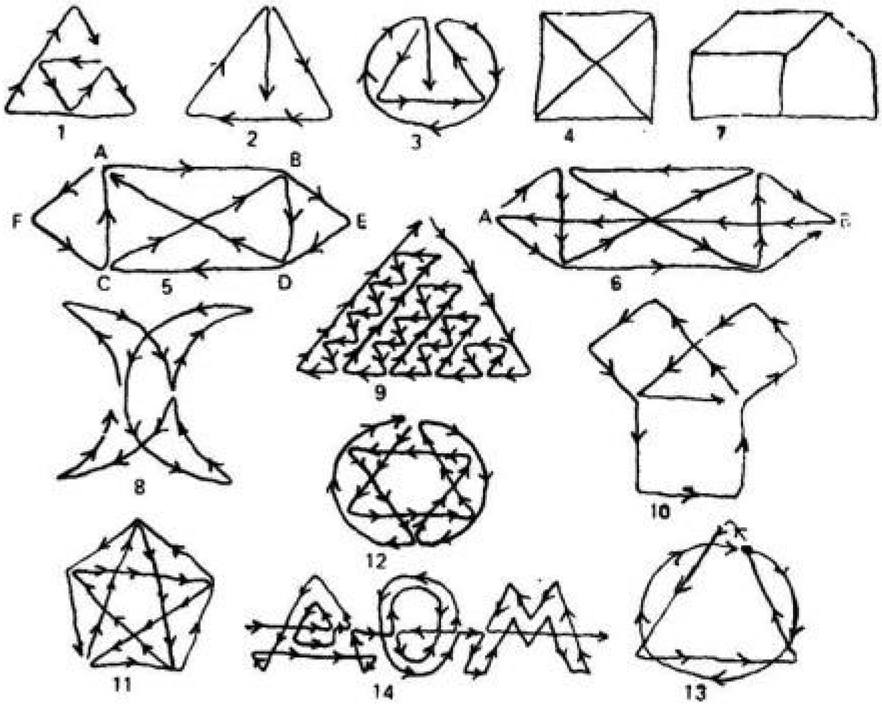


Figura 289

Los puentes de Leningrado

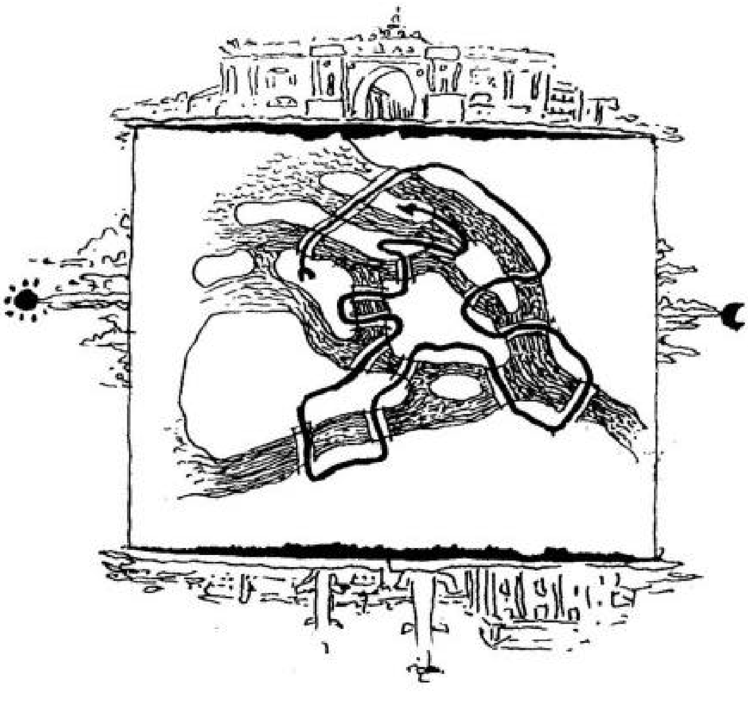


Figura 290